

doi:10.13756/j.gtxyj.2026.240144.

光通信系统与网络技术

寇芸洁, 范亚男, 朱雁兵, 等. 基于轨道角动量的高维贝尔态产生[J]. 光通信研究, 2026(1): 240144.

Kou Y J, Fan Y N, Zhu Y B, et al. High-Dimensional Bell State Generation based on Orbital Angular Momentum[J]. Study on Optical Communications, 2026(1): 240144.

## 基于轨道角动量的高维贝尔态产生

寇芸洁, 范亚男, 朱雁兵, 尚佳奇, 王斐然

(西安工程大学 理学院, 西安 710048)

**摘要:**【目的】量子通信是一种具有广阔应用前景的新型通信方式, 其与经典的信息科学技术相结合, 具有无条件安全性以及对信息的高效传输等特性, 是当今通信领域的研究热点。高维量子纠缠通常具有很强的非局域性, 能够更好地保障量子通信过程中的安全性, 在量子通信和量子计算中扮演着至关重要的角色。为了满足量子信息科学对高维量子纠缠态的需求, 文章提出了一种基于光子轨道角动量(OAM)的高维贝尔态产生方法, 能够高保真度地生成所需的完备贝尔态基矢。【方法】文中首先研究了光子 OAM 的自发参量下转换(SPDC)过程, 并进一步利用遗传算法(GA)对泵浦光的量子态进行优化, 以获得所需的高维最大纠缠态。文章详细分析了拉盖尔高斯(LG)光束的特性, 并探讨了其在 SPDC 过程中的应用, 通过优化泵浦光的各参数, 在三维、四维和五维空间中产生了最大纠缠态。【结果】通过空间模式光谱分布对比表明, 优化后的纠缠态与目标态具有更高的保真度。此外, 通过模拟产生 16 个贝尔态, 验证了生成的量子态能构成四维希尔伯特空间的完备基。【结论】文章所提方案不仅实现了高维纠缠态的有效产生, 也使更长距离的量子通信, 甚至在全球范围内实现量子通信系统成为可能。而且为量子通信和量子计算领域中的高维纠缠态的应用提供了新的途径, 对推动量子信息科学的发展具有重要意义。

**关键词:**量子通信; 光子轨道角动量; 高维纠缠态

**中图分类号:** TN929

**文献标志码:** A

## High-Dimensional Bell State Generation based on Orbital Angular Momentum

KOU Yunjie, FAN Yanan, ZHU Yanbing, SHANG Jiaqi, WANG Feiran

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** 【Objective】 Quantum communication is an emerging mode of communication with broad application prospects, combining with classical information science and technology. It offers unconditional security and efficient transmission of information, making it a hot research topic in today's communication field. High-dimensional quantum entanglement often exhibits strong non-locality, enhancing the security in quantum communication processes and playing a crucial role in quantum communication and computing. To meet the demand for high-dimensional entangled states in quantum information science, this paper proposes a method for generating high-dimensional Bell states based on the Orbital Angular Momentum (OAM) of photons, capable of producing the complete set of Bell state basis vectors with high fidelity. 【Methods】 Initially, the Spontaneous Parametric Down-Conversion (SPDC) process involving photon OAM is studied. Furthermore, a Genetic Algorithm (GA) is employed to optimize the quantum state of the pump light, aiming to obtain the required high-dimensional maximally entangled states. We analyze the characteristics of Laguerre-Gaussian (LG) beams in detail and explore their application in the SPDC process. By optimizing the parameters of the pump light, maximally entangled states are generated in three-dimensional, four-dimensional, and five-dimensional spaces. 【Results】 A comparison of the spatial mode spectral distribution shows that the optimized entangled states possess higher fidelity to the target states. Additionally, by simulating the generation of 16 Bell states, it is verified that the produced quantum states form a complete basis for a four-dimensional Hilbert space. 【Conclusion】 The proposed scheme not only effectively generates high-dimensional entangled states but also enables longer-distance quantum communication and potentially global quantum communication systems. Moreover, it provides new avenues for the application of high-dimensional entangled states in the fields of quantum communication and computing, significantly contributing to the advancement of quantum information science.

**Key words:** quantum communication; photon OAM; high-dimensional entangled states

## 0 引言

在量子信息学的研究中, 量子纠缠作为核心的量子资源<sup>[1-2]</sup>, 被广泛应用于量子隐形传态、量子密钥分发、纠缠交换和量子通信等领域<sup>[3-11]</sup>。具有光

子轨道角动量 (Orbital Angular Momentum, OAM) 自由度的最大纠缠光子对是实现大容量量子计算和量子通信的重要手段, 可以在任意维度的希尔伯特空间进行信息编码<sup>[12-15]</sup>。基于 OAM 的纠缠态, 产生方法从早期的级联原子干涉<sup>[16]</sup>到现在常用的非

收稿日期: 2024-06-04; 修回日期: 2024-08-19; 纸质出版日期: 2026-02-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11804271)

作者简介: 寇芸洁 (2000-), 女, 陕西西安人。硕士, 主要研究方向为量子计算与量子信息。

通信作者: 王斐然, 副教授。E-mail: feiran0325@xjtu.edu.cn

© Editorial Office of *Study on Optical Communications*. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license.

线性晶体中自发参量下转换(Spontaneous Parametric Down-Conversion, SPDC)过程<sup>[17]</sup>,经过不断地改进,提高了源的亮度、效率和所产生的纠缠质量<sup>[18-24]</sup>。但由于受诸多实验条件限制和不可避免的环境噪声等影响,制备出的量子纠缠态并不是最大纠缠态,在量子通信中将会导致信息失真。本文通过模拟优化产生了一种在非线性晶体中通过 SPDC 过程产生具有 OAM 自由度的空间最大纠缠光子对的方案,为高维量子信息的研究奠定了基础。本文第 1 章介绍了纠缠光子对的理论计算以及优化算法;第 2 章概述了高维最大纠缠态的产生以及完备的高维贝尔基的产生方案;第 3 章对纠缠量子态的应用进行了总结与展望。

## 1 理论分析

拉盖尔高斯(Laguerre-Gaussian, LG)光束是典型的携带 OAM 的涡旋光,归一化的 LG 模式在柱坐标下可表示为

$$LG_p^\ell(\rho, \phi) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|\ell|)!}} \frac{1}{w} \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{w}\right)^{| \ell |} \times \exp\left(\frac{-\rho^2}{w^2}\right) L_p^{|\ell|} \left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \exp(i\ell\phi), \quad (1)$$

式中:  $LG_p^\ell(\rho, \phi)$  为 LG 光束的模式函数,  $\rho$  和  $\phi$  分别为圆柱坐标系中的径向距离和方位角,表示光束在空间中的位置,  $\ell$  和  $p$  分别为 LG 光束的角向指数和径向指数,  $\ell$  为该 LG 光束携带的 OAM 数,  $p$  为该 LG 光束的径向模式分布,通常情况取 0;  $L_p^{|\ell|}$  为广义拉盖尔多项式,用于描述 LG 光束径向分布;  $w$  为光束束腰半径,  $i$  为虚数单位。使用 LG 模式的任

$$C_{p_s, p_i}^{\ell_s, \ell_i} = \delta_{\ell_s, \ell_i + \ell} \sqrt{\frac{2}{\pi w_p^2} \frac{2^{\sigma_s+1} \gamma_s^{|\ell_s|+1} \gamma_i^{|\ell_i|+1}}{(1+\gamma_s^2+\gamma_i^2)^{\sigma_s+1}} \sqrt{p_p! p_s! p_i! (|\ell_p|+p_p)! (|\ell_s|+p_s)! (|\ell_i|+p_i)!}} \times \sum_{k=0}^{p_s} \sum_{m=0}^{p_s} \sum_{j=0}^{p_i} \frac{(-2)^{k+m+j} \gamma_s^{2m} \gamma_i^{2j}}{(1+\gamma_s^2+\gamma_i^2)^{k+m+j}} \times \frac{[\sigma_\ell + k + m + j]!}{(p_p - k)! (|\ell_p| + k)! k! (p_s - m)! (|\ell_s| + m)! m! (p_i - j)! (|\ell_i| + j)! j!}, \quad (4)$$

式中:  $\sigma_\ell = (|\ell_p| + |\ell_s| + |\ell_i|)/2$  为辅助参数,用于简化表达式,同时反映参与相互作用的所有光子的 OAM 总和的特征;  $\gamma_s = w_p/w_s$  和  $\gamma_i = w_p/w_i$  分别为泵浦束腰与信号和闲置束腰之比。  $\gamma_s$  和  $\gamma_i$  在下转换状态的组成中起着关键作用。

以三维纠缠态为例,史保森团队<sup>[18]</sup>通过 SPDC 过程产生具有 OAM 自由度的空间最大纠缠光子对,图 1 所示为输入泵浦光的空间光谱分布。输入

意叠加设计泵浦光束,通过 SPDC 过程实现了基于 OAM 的双光子最大纠缠态。在 LG 模式中,通过 SPDC 过程产生的下转换光子对  $|\psi_{\text{SPDC}}\rangle$  可表示为

$$|\psi_{\text{SPDC}}\rangle = \sum_{\ell_s, p_s} \sum_{\ell_i, p_i} c_{p_s, p_i}^{\ell_s, \ell_i} |\ell_s, p_s\rangle |\ell_i, p_i\rangle, \quad (2)$$

式中:  $|\ell_s, p_s\rangle$  为信号光子所处的态;  $|\ell_i, p_i\rangle$  为闲置光子所处的态;  $|c_{p_s, p_i}^{\ell_s, \ell_i}|^2$  为在  $|\ell_s, p_s\rangle$  态中找到信号光子和在  $|\ell_i, p_i\rangle$  态中找到闲置光子的重合概率(SPDC 过程产生的光子对——信号光子和闲置光子);  $\ell_s$  和  $p_s$  为信号光子的角向指数和径向指数;  $\ell_i$  和  $p_i$  为闲置光子的角向指数和径向指数。将符合概率  $|c_{p_s, p_i}^{\ell_s, \ell_i}|^2$  的分布称为空间光谱分布  $C_{p_s, p_i}^{\ell_s, \ell_i}$ , 可表示为

$$C_{p_s, p_i}^{\ell_s, \ell_i} = \langle \psi_i, \psi_s | \psi_{\text{SPDC}} \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho d\rho LG_{p_s}^{\ell_s}(\rho, \phi) \times [LG_{p_i}^{\ell_i}(\rho, \phi)]^* [LG_{p_s}^{\ell_s}(\rho, \phi)]^*, \quad (3)$$

式中,  $\psi_i$  和  $\psi_s$  分别为闲置光子和信号光子的 LG 模式函数,  $[\cdot]^*$  为复共轭。

将式(1)代入式(3)后,可得  $\int_0^{2\pi} d\phi \exp[i(\ell_p - \ell_s - \ell_i)\phi] = 2\pi \delta_{\ell_p, \ell_s + \ell_i}$ , ( $\delta_{\ell_p, \ell_s + \ell_i}$  为克罗内克-德尔塔函数,表示:如果  $\ell_p = \ell_s + \ell_i$ , 则  $\delta_{\ell_p, \ell_s + \ell_i} = 1$ ; 如果  $\ell_p \neq \ell_s + \ell_i$ , 则  $\delta_{\ell_p, \ell_s + \ell_i} = 0$ , 即 OAM 守恒定律  $\ell_p = \ell_s + \ell_i$ 。将其代入式(3)同时使用广义拉盖尔多项式  $L_p^{|\ell|}(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{(p+|\ell|)!}{(p-k)! (|\ell|+k)! k!} x^k$  ( $x = (r/w)^2$ ,  $r$  为径向距离), 由此可得,任意 LG 泵浦(或其叠加)产生的下转换光子的精确解析形式为

泵浦光为叠加态,即  $|L\rangle_p = (|-2\rangle_p + |0\rangle_p + |2\rangle_p)/\sqrt{3}$ , 输出的空间谱分布等于各纯态的线性叠加效应,通过增加泵浦  $|\pm 2\rangle_p$  的占比,  $|1\rangle_s |1\rangle_i$  和  $|-1\rangle_s |-1\rangle_i$  的概率幅增大,更接近最大纠缠态。本文利用优化算法优化系统中各参数,降低  $|1\rangle_s |1\rangle_i$ ,  $|0\rangle_s |0\rangle_i$  和  $|-1\rangle_s |-1\rangle_i$  以外的概率幅,产生三维最大纠缠态,并将纠缠维度拓展到四维和五维情况,并产生了一组完备的高维贝尔态。

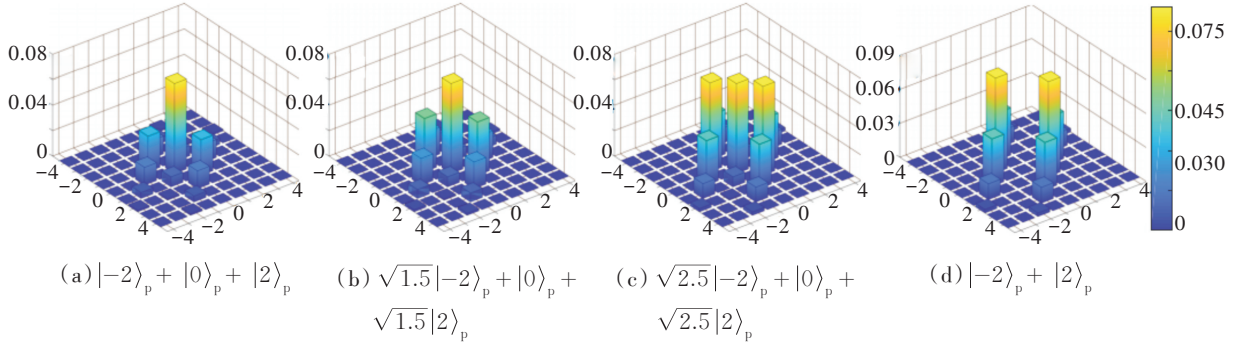


图 1 下转换光子的输入泵浦光空间光谱分布

Figure 1 The spatial and spectral distribution of the input pump light for down-converted photons

遗传算法(Genetic Algorithm, GA)、粒子群优化(Particle Swarm Optimization, PSO)算法和差分进化(Differential Evolution, DE)算法等都是常用的优化算法,在进行尝试后发现,各算法中GA的优化效果最好,收敛速度稳定,故使用GA进行优化。当使用GA生成最优解时,首先从种群中随机产生符合条件的初始种群,随后根据预先设定的目标函数设置约束条件,从中选出符合条件的个体,GA在图像处理、神经网络、机器学习和模式识别等领域都有广阔的应用前景。图2所示为GA执行过程图。

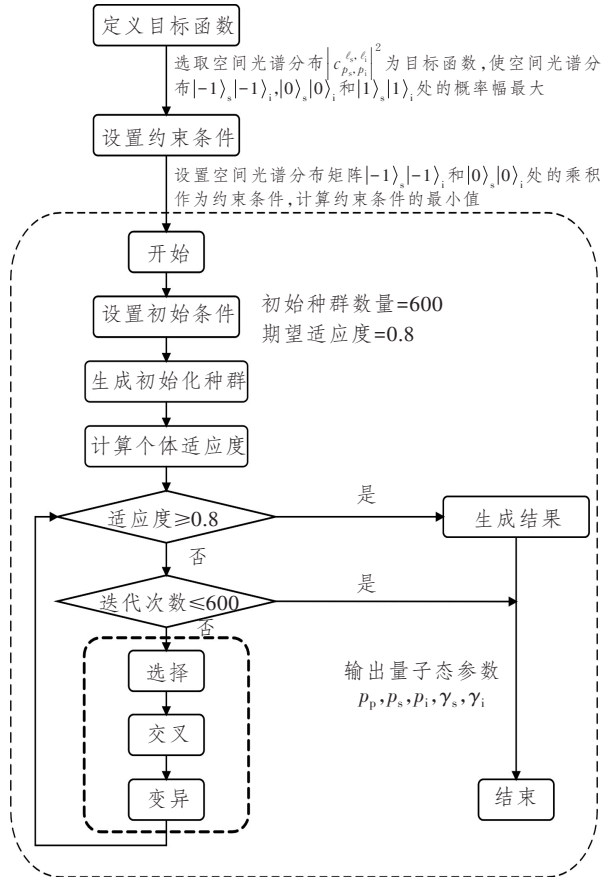


图 2 GA 执行过程图

Figure 2 Diagram of GA execution process

## 2 高维最大纠缠态及贝尔基的产生

### 2.1 高维最大纠缠态的产生

采用史保森团队<sup>[18]</sup>提出的三维最大纠缠态的产生方案,基于GA优化泵浦光的各参数( $p_p, p_s, p_i, \gamma_s, \gamma_i$ ),通过该方案可以产生更好的纠缠态。使用GA进行优化时,种群数量与迭代次数会影响运算时间与效率,通过多次重复实验,选择初始种群的数量为600,最大迭代次数为600,选取空间光谱分布作为目标函数,使空间光谱分布 $| -1 \rangle_s | -1 \rangle_i$ 、 $| 0 \rangle_s | 0 \rangle_i$ 和 $| 1 \rangle_s | 1 \rangle_i$ 处的概率幅最大;设置空间光谱分布矩阵 $| -1 \rangle_s | -1 \rangle_i$ 和 $| 0 \rangle_s | 0 \rangle_i$ 处的乘积作为约束条件,计算约束条件的最小值,此时将优化后的各参数( $p_p, p_s, p_i, \gamma_s, \gamma_i$ )代入空间光谱分布公式中,选择期望适应度为0.8(如果适应度小于期望值将不断进行进化,如选取较小则约束条件无法满足),在上述参数设置下,模型已达到较好收敛效果,将生成更优的三维纠缠态。在不同维度情况下,优化前的空间光谱各参数设置相同( $p_p=0, p_s=0, p_i=0, \gamma_s=0.5, \gamma_i=0.5$ )。

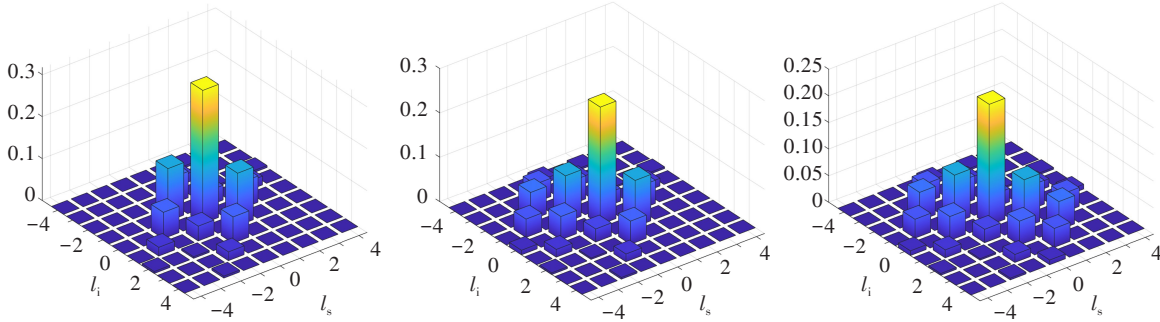
输入泵浦光为叠加态: $| L \rangle_p = (| -2 \rangle_p + | 0 \rangle_p + | 2 \rangle_p) / \sqrt{3}$ ,则输出的空间谱分布等于各纯态的线性叠加效应,输入泵浦光优化前后的空间光谱分布如图3(a)第1幅图和图3(b)第1幅图所示。由图可知,优化前与优化后的空间光谱( $p_p=2, p_s=4, p_i=4, \gamma_s=0.5441, \gamma_i=0.5441$ )相比, $| -1 \rangle_s | -1 \rangle_i$ 和 $| 1 \rangle_s | 1 \rangle_i$ 的概率幅增大,更接近三维最大纠缠态。

输入泵浦光为叠加态: $| L \rangle_p = (| -4 \rangle_p + | -2 \rangle_p + | 0 \rangle_p + | 2 \rangle_p) / 2$ ,其优化前后的空间光谱分布如图3(a)第2幅图和3(b)第2幅图所示。由图可知,优化前

与优化后的空间光谱 ( $p_p=2, p_s=4, p_i=4, \gamma_s=0.5043, \gamma_i=0.5043$ ) 相比,  $| -2 \rangle_s | -2 \rangle_i, | -1 \rangle_s | -1 \rangle_i$  和  $| 1 \rangle_s | 1 \rangle_i$  的概率幅增大, 更接近四维最大纠缠态。

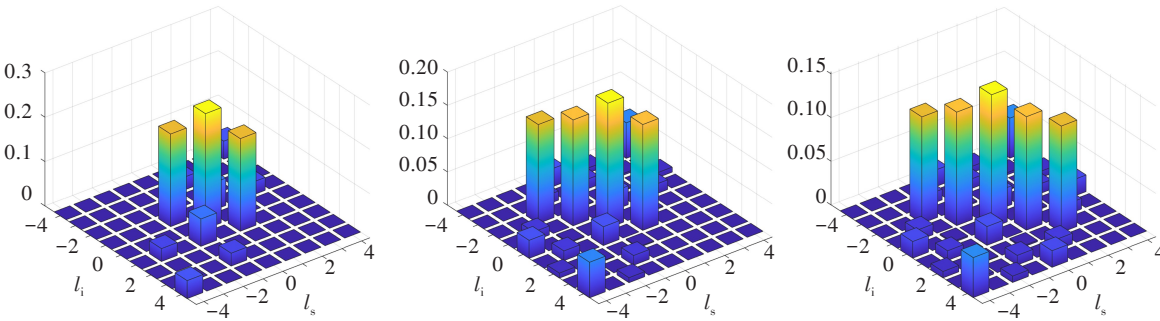
输入泵浦光为叠加态:  $| L \rangle_p = (| -4 \rangle_p + | -2 \rangle_p + | 0 \rangle_p + | 2 \rangle_p + | 4 \rangle_p) / \sqrt{5}$ , 其优化前

后的空间光谱分布如图 3(a) 第 3 幅图和图 3(b) 第 3 幅图所示。由图可知, 优化前与优化后的空间光谱 ( $p_p=2, p_s=4, p_i=4, \gamma_s=0.5, \gamma_i=0.5$ ) 相比,  $| -2 \rangle_s | -2 \rangle_i, | -1 \rangle_s | -1 \rangle_i, | 1 \rangle_s | 1 \rangle_i$  和  $| 2 \rangle_s | 2 \rangle_i$  的概率幅增大, 更接近五维最大纠缠态。



(a) 优化前的空间光谱分布

(a) The spatial spectral distributions before optimization



(b) 优化后的空间光谱分布

(b) The spatial spectral distributions after optimization

注:  $l_i$  和  $l_s$  分别表示闲置光子和信号光子携带的轨道角动量数。

图 3 下转换光子的空间光谱分布

Figure 3 The spatial spectral distribution of down-converted photons

本文采用量子态的保真度衡量量子态与目标态之间的接近程度。设有量子态  $|\psi\rangle$  和目标态  $|\varphi\rangle$ , 量子态的保真度  $f$  定义为  $f = |\langle \psi | \varphi \rangle|^2$ , 其取值范围在 0 到 1 之间。当  $f=1$  时, 表示两个态完全相同; 当  $f=0$  时, 表示两个态完全正交。使用 GA 优化输入泵浦光时, 种群数量与迭代次数会影响运算时间与

效率, 通过多次重复实验, 选择初始种群的数量为 6 000, 最大迭代次数为 6 000, 在上述参数设置下, 模型已达到较好收敛效果, 将生成更优的三维最大纠缠态。设  $|\varphi\rangle = (| -1 -1 \rangle + | 00 \rangle + | 11 \rangle) / \sqrt{3}$  作为目标态,  $f$  作为约束条件, 计算  $f$  的最大值, 此时输出态为三维最大纠缠态。图 4 所示为输入泵浦光的空间光谱分布, 表 1 所示为输出态各参数。

表 1 输出态各参数

Table 1 Parameters of the output state

输出态	$a_n$	$b_n$	$c_n$	$d_n$	$e_n$	$\alpha_n$	$\beta_n$	$\gamma_n$	$\xi_n$	$\eta_n$
$\psi_1$	1.24	1.00	1.24	/	/	$-9.12 \times 10^{-6} \pi$	0	$2.96 \times 10^{-6} \pi$	/	/
$\psi_2$	1.26	1.18	1.00	1.18	/	$-1.13 \times 10^{-4} \pi$	$-1.85 \times 10^{-4} \pi$	0	$-5.79 \times 10^{-5} \pi$	/
$\psi_3$	1.25	1.17	1.00	1.17	1.25	$-1.69 \times 10^{-6} \pi$	$-1.78 \times 10^{-5} \pi$	0	$7.90 \times 10^{-6} \pi$	$4.09 \times 10^{-6} \pi$

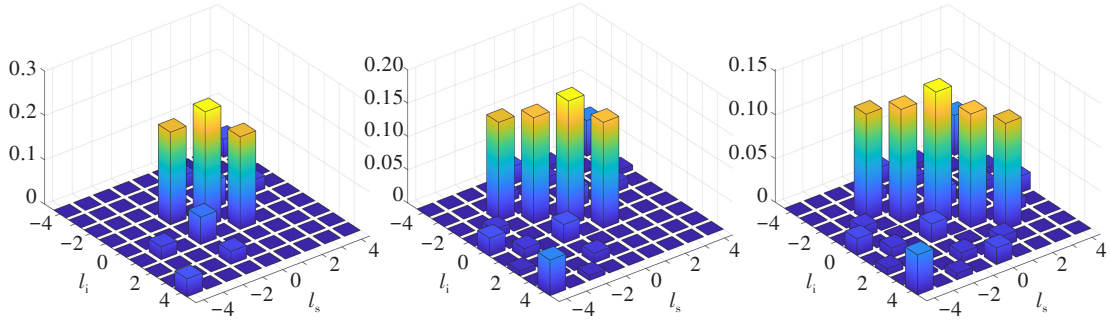
注:  $a e^{i\alpha}, b e^{i\beta}, c e^{i\gamma}, d e^{i\delta}$  和  $e e^{i\eta}$  均为优化算法调整后基矢态的概率幅, 对应基矢态在最终输出态中的权重, 用于量化优化效果。通过优化, 使其尽可能接近目标态中的理想值, 达到最大纠缠;  $e e^{i\eta}$  中两个  $e$  含义不同, 前面的  $e$  表示参数变量, 后面的  $e$  表示常数。

设置目标态为  $|\varphi\rangle = (|-1-1\rangle + |00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{3}$ , 经算法优化后输出态  $\psi_1$  可表示为  $\psi_1 = (a_1 e^{i\alpha_1} |-2\rangle + b_1 e^{i\beta_1} |0\rangle + c_1 e^{i\gamma_1} |2\rangle)/\sqrt{3}$ , 其优化前后的空间光谱分布如图 4(a) 第 1 幅图和图 4(b) 第 1 幅图所示, 由图可知, 与泵浦光  $|\varphi\rangle = (|-2\rangle + |0\rangle + |2\rangle)/\sqrt{3}$  的空间光谱分布相比,  $|-1\rangle_s |-1\rangle_i$  和  $|1\rangle_s |1\rangle_i$  处的概率幅增大且趋近于  $|0\rangle_s |0\rangle_i$  处, 产生了三维最大纠缠态。

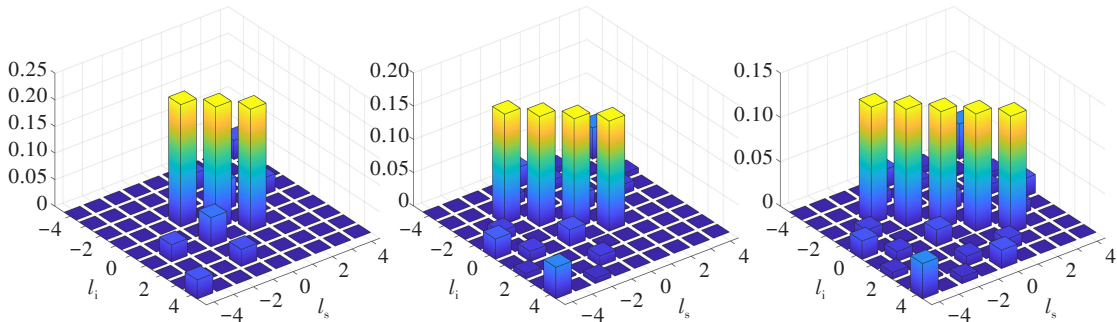
设置目标态为  $|\varphi\rangle = (|-2-2\rangle + |-1-1\rangle + |00\rangle + |11\rangle)/2$ , 经算法优化后输出态  $\psi_2$  可表示为  $\psi_2 = (a_2 e^{i\alpha_2} |-4\rangle + b_2 e^{i\beta_2} |-2\rangle + c_2 e^{i\gamma_2} |0\rangle + d_2 e^{i\delta_2} |2\rangle)/2$ , 其优化前后的空间光谱分布如图 4(a) 第 2 幅图和图 4(b) 第 2 幅图所示, 由图可知, 与泵浦光  $|\varphi\rangle =$

$(|-4\rangle + |-2\rangle + |0\rangle + |2\rangle)/2$  的空间光谱分布相比,  $|-2\rangle_s |-2\rangle_i$ ,  $|-1\rangle_s |-1\rangle_i$  和  $|1\rangle_s |1\rangle_i$  处的概率幅增大且趋近于  $|0\rangle_s |0\rangle_i$  处, 产生了四维最大纠缠态。

设置目标态为  $|\varphi\rangle = (|-2-2\rangle + |-1-1\rangle + |00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)/\sqrt{5}$ , 经算法优化后输出态  $\psi_3$  可表示为  $\psi_3 = (a_3 e^{i\alpha_3} |-4\rangle + b_3 e^{i\beta_3} |-2\rangle + c_3 e^{i\gamma_3} |0\rangle + d_3 e^{i\delta_3} |2\rangle + e_3 e^{i\epsilon_3} |4\rangle)/\sqrt{5}$ 。其优化前后的空间光谱分布如图 4(a) 第 3 幅图和 4(b) 第 3 幅图所示, 由图可知, 与泵浦光  $|\varphi\rangle = (|-4\rangle + |-2\rangle + |0\rangle + |2\rangle + |4\rangle)/\sqrt{5}$  的空间光谱分布相比,  $|-2\rangle_s |-2\rangle_i$ ,  $|-1\rangle_s |-1\rangle_i$ ,  $|1\rangle_s |1\rangle_i$  和  $|2\rangle_s |2\rangle_i$  处的概率幅增大且趋近于  $|0\rangle_s |0\rangle_i$  处, 产生了五维最大纠缠态。



(a) 优化前的空间光谱分布  
(a) The spatial spectral distributions before optimization



(b) 优化后的空间光谱分布  
(b) The spatial spectral distributions after optimization

图 4 下转换光子的空间光谱分布

Figure 4 The spatial spectral distributions of down-converted photons

## 2.2 完备的高维贝尔基产生

Bennett 等人<sup>[25]</sup>推广的二部系统 AB 的  $D$  维贝尔基可表示为

$$|\psi\rangle_{AB}^{mn} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k=0}^{D-1} e^{i\frac{2\pi}{D}mk} |k\rangle_A |k \oplus m\rangle_B, \quad (5)$$

式中: A 和 B 为两个纠缠的光子, 下文中指信号光

子和闲置光子;  $D$  为希尔伯特空间的维度。在四维情况下, 包含 16 个正交贝尔态, 将其分为 4 组, 每组中的 4 种状态用变量  $n=0, 1, 2, 3$  来标记, 该变量定义了概率幅值之间的相位关系; 变量  $m=0, 1, 2, 3$  定义了光子对之间的相关性。在第 1 组态  $|\varphi_{0n}\rangle$  中,

光子 A、B 共享相同的态, 概率幅值间的相对相位根据  $n$  变化, 其他 3 组态通过对第 1 组进行模式变换获得, 最后得到了四维贝尔基中的全部 16 种状态。如式(5)定义, 四维贝尔基包含两个反对称状态和 6 个对称状态, 其余 8 个状态既不对称也不反对称:

$$\begin{cases} |\varphi_{0n}\rangle = (e^{-in\pi}|-2-2\rangle + e^{-in\pi/2}|-1-1\rangle + |00\rangle + e^{in\pi/2}|11\rangle)/2 \\ |\varphi_{1n}\rangle = (e^{-in\pi}|-2-1\rangle + e^{-in\pi/2}|-10\rangle + |01\rangle + e^{in\pi/2}|1-2\rangle)/2 \\ |\varphi_{2n}\rangle = (e^{-in\pi}|-20\rangle + e^{-in\pi/2}|-11\rangle + |0-2\rangle + e^{in\pi/2}|1-1\rangle)/2 \\ |\varphi_{3n}\rangle = (e^{-in\pi}|-21\rangle + e^{-in\pi/2}|-1-2\rangle + |0-1\rangle + e^{in\pi/2}|10\rangle)/2 \end{cases}$$

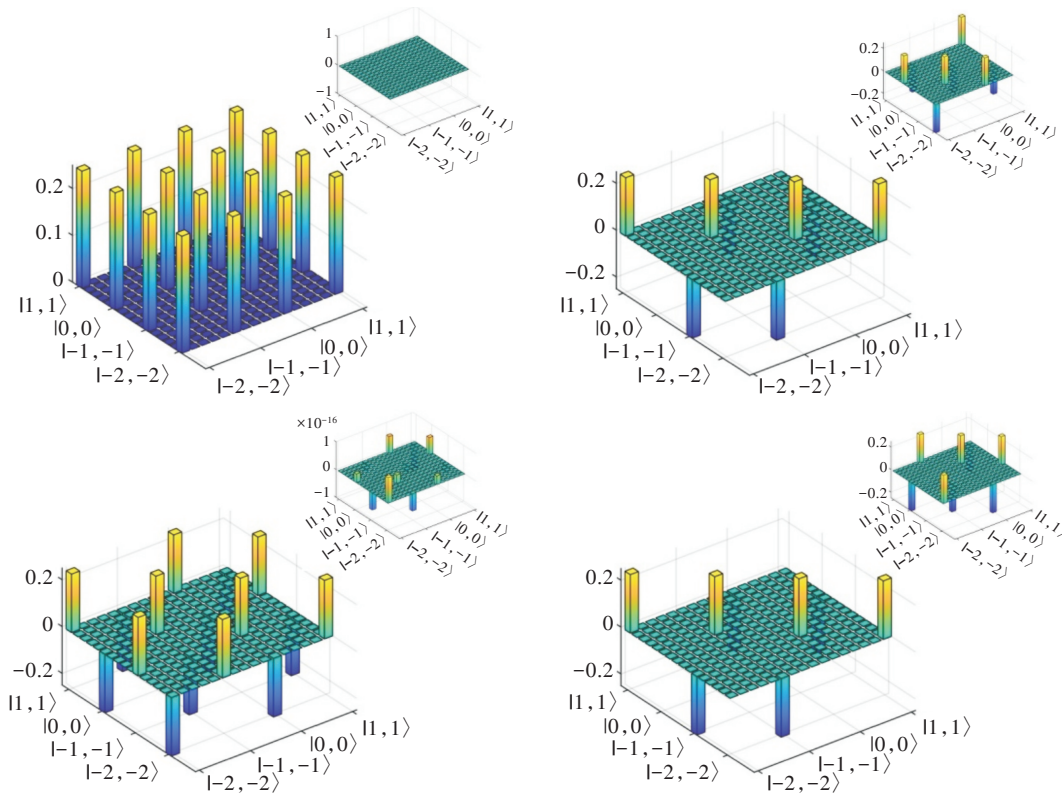
模拟产生的 16 个贝尔态构成了四维希尔伯特空间的完备基。为了量化生成的量子态的质量, 模拟了目标态及输出态的密度矩阵。设置目标态为

$$\begin{cases} |\varphi_{00}\rangle = (|-2-2\rangle + |-1-1\rangle + |00\rangle + |11\rangle)/2 \\ |\varphi_{01}\rangle = (e^{-i2\pi/2}|-2-2\rangle + e^{-i\pi/2}|-1-1\rangle + |00\rangle + e^{i\pi/2}|11\rangle)/2 \\ |\varphi_{02}\rangle = (e^{-i4\pi/2}|-2-2\rangle + e^{-i2\pi/2}|-1-1\rangle + |00\rangle + e^{i2\pi/2}|11\rangle)/2 \\ |\varphi_{03}\rangle = (e^{-i6\pi/2}|-2-2\rangle + e^{-i3\pi/2}|-1-1\rangle + |00\rangle + e^{i3\pi/2}|11\rangle)/2 \end{cases}$$

经算法优化后输出态:

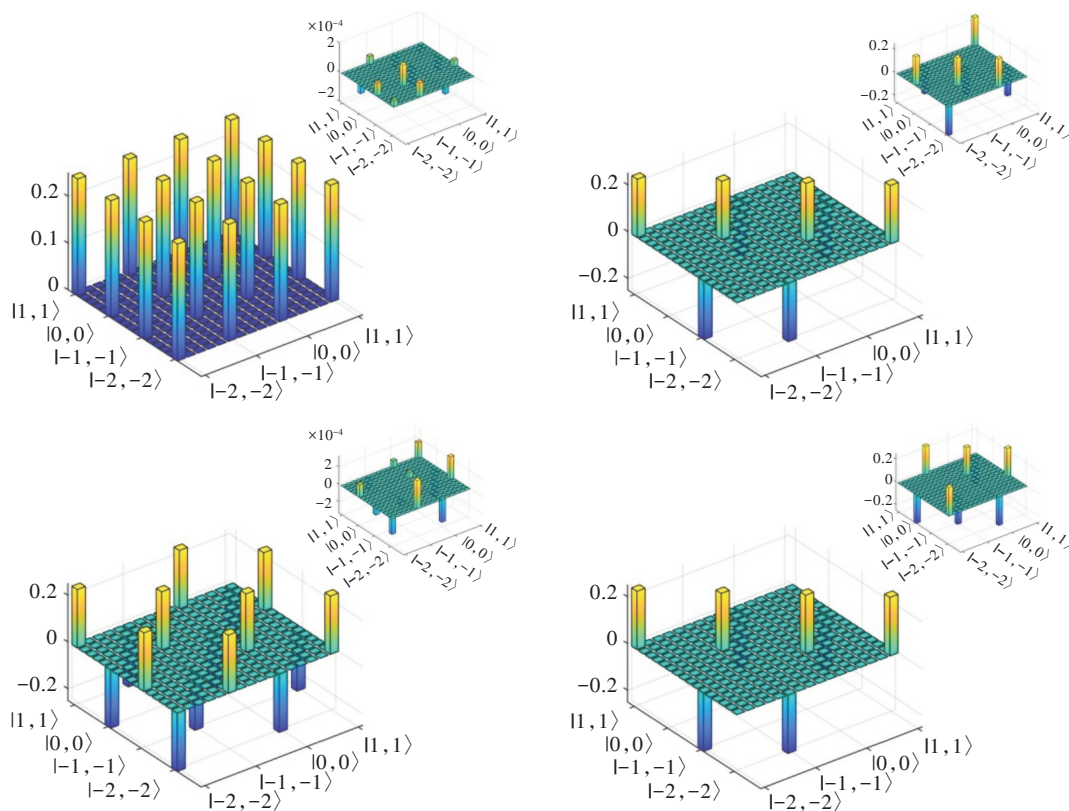
$$|\psi_{0n}\rangle = (a_n e^{i\alpha_n}|-2-2\rangle + b_n e^{i\beta_n}|-1-1\rangle + |00\rangle + c_n e^{i\gamma_n}|11\rangle)/2$$

四维最大纠缠态的密度矩阵如图 5 所示, 由图可知, 输出态的密度矩阵与目标态高度一致, 即在模拟过程中得到的输出态与期望的目标态非常接近, 反映了模拟结果的准确性, 所采用的模拟方法和参数能够有效地再现目标态, 产生四维最大纠缠态。表 2 所示为输出态各参数值。



(a) 目标态  $|\varphi_{0n}\rangle (n=0, 1, 2, 3)$  的密度矩阵

(a) The density matrices of the target states  $|\varphi_{0n}\rangle (n=0, 1, 2, 3)$

(b) 优化后输出态 $|\psi_{0n}\rangle$ 的密度矩阵(b) The density matrices of the optimized output states $|\psi_{0n}\rangle$ 

注：右上小图为虚部。

图 5 四维最大纠缠态的密度矩阵

Figure 5 Density matrices of four-dimensional maximally entangled states

表 2 输出态各参数

Table 2 Parameters of the output state

输出态	$a_n$	$b_n$	$c_n$	$\alpha_n$	$\beta_n$	$\gamma_n$
$\psi_{00}$	1.00	1.00	1.00	$-1.13 \times 10^{-4} \pi$	$-1.85 \times 10^{-4} \pi$	$-5.79 \times 10^{-5} \pi$
$\psi_{01}$	0.99	1.00	1.00	$-\pi$	$-0.5 \pi$	$0.5 \pi$
$\psi_{02}$	1.00	0.99	0.99	$1.01 \times 10^{-4} \pi$	$\pi$	$-\pi$
$\psi_{03}$	0.99	0.99	0.99	$\pi$	$0.5 \pi$	$-0.5 \pi$

这种方法不仅适用于三维和五维情况,而且可以拓展至更高维度的纠缠态中。

### 3 结束语

本研究基于文献[18]提出的纠缠态的产生方案,在结合优化算法的基础上,给出了一组完备的高维贝尔态的产生方案。结果表明,该方案在产生更优的最大纠缠态基础上,将纠缠维度拓展到四维和五维情况,并产生了一组完备的高维贝尔态。面对量子纠缠在量子通信领域的重要作用,这种能够产生高质量纠缠量子态的方法为实际量子通信网络的应用奠定了基础。

#### 参考文献:

- [1] Nemirovsky-Levy L, Pereg U, Segev M. Increasing Quantum Communication Rates Using Hyperentangled Photonic States [J]. Optica Quantum, 2024, 2 (3) : 165–172.
- [2] Kong L J, Sun Y, Zhang F, et al. High-Dimensional Entanglement-Enabled Holography [J]. Physical Review Letters, 2023, 130(5): 053602.
- [3] Luo Y H, Zhong H S, Erhard M, et al. Quantum Teleportation in High Dimensions [J]. Physical Review Letters, 2019, 123(7): 070505.
- [4] Nadlinger D P, Dmota P, Nichol B C, et al. Experimental Quantum Key Distribution Certified by Bell's Theorem [J]. Nature, 2022, 607(7920): 682–686.

- [5] Zhang W H, Chen G, Peng X X, et al. Experimental Realization of Robust Self-Testing of Bell State Measurements[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(9): 090402.
- [6] Li B, Cao Y, Li Y H, et al. Quantum State Transfer over 1 200 km Assisted by Prior Distributed Entanglement[J]. *Physical Review Letters*, 2022, 128(17): 170501.
- [7] Srivastav V, Valencia N H, McCutcheon W, et al. Quick Quantum Steering: Overcoming Loss and Noise with Qudits[C]//2023 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO). San Jose, CA, USA: IEEE, 2023: 10259302.
- [8] Ding Y, Bacco D, Dalgaard K, et al. High-Dimensional Quantum Key Distribution based on Multicore Fiber Using Silicon Photonic Integrated Circuits [J]. *NPJ Quantum Information*, 2017, 3: 25.
- [9] Bavaresco J, Herrera Valencia N, Klöckl C, et al. Measurements in Two Bases are Sufficient for Certifying High-Dimensional Entanglement[J]. *Nature Physics*, 2018, 14(10): 1032–1037.
- [10] Hu X M, Xing W B, Liu B H, et al. Efficient Distribution of High-Dimensional Entanglement through 11 km Fiber[J]. *Optica*, 2020, 7(7): 738–743.
- [11] Martin A, Guerreiro T, Tiranov A, et al. Quantifying Photonic High-Dimensional Entanglement[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(11): 110501.
- [12] Hu X M, Xing W B, Liu B H, et al. Efficient Generation of High-Dimensional Entanglement through Multipath Down-Conversion[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(9): 090503.
- [13] Liu X, Hu J, Li Z F, et al. Heralded Entanglement Distribution between Two Absorptive Quantum Memories[J]. *Nature*, 2021, 594(7861): 41–45.
- [14] Bulla L, Hjorth K, Kohout O, et al. Distribution of Genuine High-Dimensional Entanglement over 10.2 km of Noisy Metropolitan Atmosphere [J]. *Physical Review A*, 2023, 107(5): L050402.
- [15] Li Y, Huang S Y, Wang M, et al. Two-Measurement Tomography of High-Dimensional Orbital Angular Momentum Entanglement [J]. *Physical Review Letters*, 2023, 130(5): 050805.
- [16] Kysela J, Erhard M, Hochrainer A, et al. Path Identity as a Source of High-Dimensional Entanglement [J]. *PNAS*, 2020, 117(42): 26118–26122.
- [17] Karan S, Prasad R, Jha A K. Postselection-Free Controlled Generation of a High-Dimensional Orbital-Angular-Momentum Entangled State[J]. *Physical Review Applied*, 2023, 20(5): 054027.
- [18] Liu S, Zhou Z, Liu S, et al. Coherent Manipulation of a Three-Dimensional Maximally Entangled State [J]. *Physical Review A*, 2018, 98(6): 062316.
- [19] Wang F, Erhard M, Babazadeh A, et al. Generation of the Complete Four-Dimensional Bell Basis[J]. *Optica*, 2017, 4(12): 1462–1467.
- [20] Kovlakov E V, Straupe S S, Kulik S P. Quantum State Engineering with Twisted Photons via Adaptive Shaping of the Pump Beam [J]. *Physical Review A*, 2018, 98(6): 060301.
- [21] Liu S, Zhang Y, Yang C, et al. Increasing Two-Photon Entangled Dimensions by Shaping Input-Beam Profiles[J]. *Physical Review A*, 2020, 101(5): 052324.
- [22] Wen Y, Chremmos I, Chen Y, et al. Arbitrary Multiplication and Division of the Orbital Angular Momentum of Light[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(21): 213901.
- [23] Rozenberg E, Karnieli A, Yesharim O, et al. Inverse Design of Spontaneous Parametric Downconversion for Generation of High-Dimensional Qudits [J]. *Optica*, 2022, 9(6): 602–615.
- [24] 张敏, 范亚男, 寇芸洁, 等. 光子轨道角动量及其在量子计算中的应用研究 [J]. *光通信研究*, 2025(3): 230184.
- Zhang M, Fan Y N, Kou Y J, et al. Photon's Orbital Angular Momentum and Its Application Research on Quantum Computing[J]. *Study on Optical Communications*, 2025(3): 230184.
- [25] Bennett C, Brassard G, Crépeau C, et al. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 70(13): 1895–1899.